クラスA雑音の性質・推定・生成

梅原 大祐

初出: 平成 18 年 9 月 15 日
修正: 平成 18 年 12 月 8 日

1 はじめに

電力線通信では，家電機器から突発的に高振幅な雑音が発生することがある．このような雑音をインパルス性雑音と呼ぶ．インパルス性雑音のモデル化には種々あるが，ここでは，Middleton が，狭帯域無線雑音に現れるインパルス性雑音をモデル化したクラス A 雑音について説明する．参考文献 [1] をもとにすれば，ポアソン分布やガウス確率密度関数の基本的な統計的性質だけでここに書かれてあることは理解できるでしょう．

2 クラス A 雑音の概略

以下に，クラス A 雑音の特徴を述べる．

- もともと狭帯域無線通信のためのモデルである．
- 受信機フロントエンドの帯域より雑音帯域が狭い場合にうまくモデル化できる．雑音帯域が狭いということは，受信機フロントエンドの前後で雑音波形に過渡応答の影響が少ないことを意味する．
- インパルス性雑音源は無数に存在し，各インパルス性雑音源の位置はランダムである．
- 各インパルス性雑音源の単位時間当たりの雑音放射回数はランダムであり，ポアソン分布に従う．

図 1 に，クラス A 雑音の概念図を表す．分散 σ_{G}^2 のガウス雑音は常に発生をする．インパルス性雑音は平均 A のポアソン分布に従い発生する．図 1 では，3 つのインパルス性雑音が発生している状況である．発生時のインパルス性雑音の振幅は，分散 σ_{I}^2/A のガウス分布に従い発生する．従って，発生確率の平均が A であるため，長時間観測した上でのインパルス性雑音の電力は σ_{I}^2 となる．

3 クラス A 雑音の確率密度関数

ベースバンドシステムのクラス A 雑音の確率密度関数は次の通りである．

$$p_{\mathrm{A}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_m^2}\right) \tag{1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_{\mathrm{P},A}(m) \cdot p_{\mathrm{G},0,\sigma_m^2}(x) \tag{2}$$

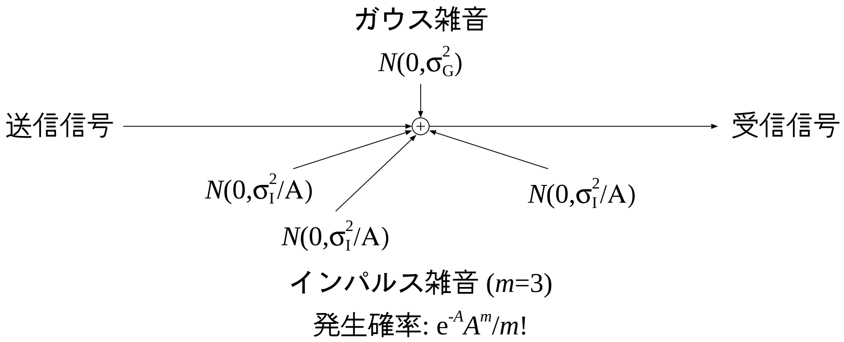

図 1: クラス A 雑音の概念図

$P_{\mathrm{P},A}(m) = \mathrm{e}^{-A}A^m/m!$ は，平均 A のポアソン分布であり，インパルス性雑音源数を与える確率分布である．$p_{\mathrm{G},0,\sigma_m^2}(x)$ は平均 0，分散 σ_m^2 のガウス確率密度関数である．m はインパルス性雑音源数を表し，σ_m^2 はインパルス性雑音源数が m のときの分散を意味する．σ_m^2 は次のように与えられる．

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \cdot \frac{m/A + \Gamma}{1+\Gamma} = m \cdot \frac{\sigma_\mathrm{I}^2}{A} + \sigma_\mathrm{G}^2 \tag{3}$$

ここで，$\sigma^2 = \sigma_\mathrm{G}^2 + \sigma_\mathrm{I}^2$ は雑音波形の分散，$\Gamma = \sigma_\mathrm{G}^2/\sigma_\mathrm{I}^2$ はガウス雑音とインパルス性雑音の電力比を表す．また，σ_G^2 はガウス雑音の平均電力，σ_I^2 はインパルス性雑音の平均電力である．

パスバンドシステムの等価低域系のクラス A 雑音 $z = x + \mathrm{j}y$ の場合の確率密度関数は，次の通りである．x が同相成分，y が直交成分を表す．

$$p_\mathrm{A}(z) = p_\mathrm{A}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A}A^m}{m!} \frac{1}{2\pi\sigma_m^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_m^2}\right) \tag{4}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_{\mathrm{P},A}(m) \cdot p_{\mathrm{G},0,\sigma_m^2}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{\mathrm{P},A}(m) \cdot p_{\mathrm{G},0,\sigma_m^2}(x) \cdot p_{\mathrm{G},0,\sigma_m^2}(y) \tag{5}$$

$$p_\mathrm{A}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A}A^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_m^2}\right) \tag{6}$$

$$p_\mathrm{A}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A}A^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_m^2}\right) \tag{7}$$

上記の確率密度関数から，同相雑音成分と直交雑音成分が統計的に独立でないことが分かる．これは，インパルス性雑音が発生したときに同相成分と直交成分の両方にインパルス性雑音成分が重畳することに起因する．ただし，インパルス性雑音の到着数 m が与えらえた場合の同相雑音成分と直交雑音成分は統計的に独立である．また，エンベロープ $w = \sqrt{x^2+y^2}$ の確率密度関数は次で与えられる．

$$p_\mathrm{A}(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A}A^m}{m!} \frac{w}{\sigma_m^2} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma_m^2}\right) \tag{8}$$

3.1 主要パラメータ

以下に主要パラメータである，A，Γ，σ^2 の説明をします．これらのパラメータがクラス A 雑音の統計的性質を決定します．

- A：インパルス指数

  単位時間当たりに入射するインパルス性雑音の平均個数とインパルスの平均持続時間との積．デジタル領域で言えば，一サンプル当たりのインパンスの平均個数．

- $\Gamma = \sigma_{\mathrm{G}}^2/\sigma_{\mathrm{I}}^2$：ガウス雑音対インパルス性雑音比

  定義通り，ガウス雑音平均電力 σ_{G}^2 とインパルス雑音平均電力 σ_{I}^2 の比．

- $\sigma^2 = \sigma_{\mathrm{G}}^2 + \sigma_{\mathrm{I}}^2$：平均電力

  定義通り，雑音の平均電力．ガウス雑音平均電力 σ_{G}^2 とインパルス雑音平均電力 σ_{I}^2 の和．

3.2 統計的性質

クラス A 雑音に基づく統計量を導出する．

最初に，ベースバンドシステムについて考える．クラス A 雑音の確率密度関数 $p_{\mathrm{A}}(x)$ に基づくランダム変数 X の特性関数 $\psi_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}u) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}uX}]$ を求める．

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}ux} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma_m^2} \right] \mathrm{d}x &(9)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}ux} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma_m^2} \right] \mathrm{d}x &(10)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 \sigma_m^2 \right) &(11)
\end{aligned}$$

特性関数より，n 次モーメント $E[X^n]$ を求める．

$$\begin{aligned}
E[X^n] &= (-\mathrm{j})^n \left. \frac{\mathrm{d}^n \psi_{\mathrm{A}}(\mathrm{j}u)}{\mathrm{d}u^n} \right|_{u=0} &(12)\\
&= \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (n-1) \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \sigma_m^n, & \text{if } n \text{ is even} \\ 0, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} &(13)
\end{aligned}$$

偶数次モーメントのうち，2, 4, 6 次モーメントに着目する．

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{1+\Gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \left(\frac{m}{A} + \Gamma \right) = \sigma^2 &(14)\\
E[X^4] &= 3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \sigma_m^4 = \frac{3\sigma^4}{(1+\Gamma)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \left(\frac{m}{A} + \Gamma \right)^2 &(15)\\
&= \frac{3\sigma^4}{(1+\Gamma)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \left(\frac{(m-A)^2}{A^2} + 2\frac{m-A}{A}(1+\Gamma) + (1+\Gamma)^2 \right) &(16)\\
&= 3\sigma^4 \left(\frac{1}{A(1+\Gamma)^2} + 1 \right) &(17)\\
E[X^6] &= 15 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \sigma_m^6 = \frac{15\sigma^6}{(1+\Gamma)^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \left(\frac{m}{A} + \Gamma \right)^3 &(18)\\
&= \frac{15\sigma^6}{(1+\Gamma)^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A} A^m}{m!} \left(\frac{(m-A)^3}{A^3} + 3\frac{(m-A)^2}{A^2}(1+\Gamma) + 3\frac{m-A}{A}(1+\Gamma)^2 + (1+\Gamma)^3 \right) &(19)\\
&= 15\sigma^6 \left(\frac{1}{A^2(1+\Gamma)^3} + \frac{3}{A(1+\Gamma)^2} + 1 \right) &(20)
\end{aligned}$$

次に，同一分布に従う互いに独立なクラス A 雑音を合成したランダム変数の確率密度関数について考える．クラス A 雑音の N 個のランダム変数 $X_1, \cdots, X_N$ を足し合わせたランダム変数を

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{21}$$

とおく．このランダム変数 $\overline{X}$ の特性関数は，

$$\psi_{\mathrm{A},\overline{X}}(\mathrm{j}u) = \prod_{i=1}^{N} \psi_{\mathrm{A},X_i}(\mathrm{j}u) = \mathrm{e}^{-NA} \prod_{i=1}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_m^2\right) \tag{22}$$

$$= \mathrm{e}^{-NA} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(NA)^m}{m!} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 \cdot N\sigma_m^2\right) \tag{23}$$

となり，ランダム変数 $\overline{X} = \overline{x}$ の確率密度関数は，

$$p_{\mathrm{A}}(\overline{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-NA}(NA)^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{2\pi(N\sigma_m)^2}} \exp\left(-\frac{\overline{x}^2}{2N\sigma_m^2}\right) \tag{24}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_{\mathrm{P},NA}(m) \cdot p_{\mathrm{G},0,N\sigma_m^2}(\overline{x}) \tag{25}$$

となる．従って，N 個の同一分布に従う互いに独立なクラス A 雑音の足し合わせは，インパルス指数 NA，ガウス雑音対インパルス性雑音比 Γ，分散 $N\sigma^2$ のクラス A 雑音となる．

次に，パスバンドシステムの等価低域系のクラス A 雑音のランダム変数 $Z = X + \mathrm{j}Y$ のエンベロープ $W = \sqrt{X^2 + Y^2}$ の統計量を導出する．ここでは，2, 4, 6 次モーメントに着目し，計算すると

$$E[W^2] = E[X^2] + E[Y^2] = 2\sigma^2 \tag{26}$$

$$E[W^4] = E[X^4] + 2E[X^2Y^2] + E[Y^4] \tag{27}$$

$$= 6\sigma^4\left(\frac{1}{A(1+\Gamma)^2} + 1\right) + 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A}A^m}{m!}\sigma_m^2\sigma_m^2 \tag{28}$$

$$= 8\sigma^4\left(\frac{1}{A(1+\Gamma)^2} + 1\right) \tag{29}$$

$$E[W^6] = E[X^6] + 3E[X^4Y^2] + 3E[X^2Y^4] + E[Y^6] \tag{30}$$

$$= 30\sigma^6\left(\frac{1}{A^2(1+\Gamma)^3} + \frac{3}{A(1+\Gamma)^2} + 1\right) + 6\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-A}A^m}{m!} 3\sigma_m^4\sigma_m^2 \tag{31}$$

$$= 48\sigma^6\left(\frac{1}{A^2(1+\Gamma)^3} + \frac{3}{A(1+\Gamma)^2} + 1\right) \tag{32}$$

となる．同一分布に従う互いに独立なクラス A 雑音の N 個のランダム変数 $Z_1 = X_1 + \mathrm{j}Y_1, \cdots, Z_N = X_1 + \mathrm{j}Y_N$ の足し合わせ $\overline{Z} = Z_1 + \cdots + Z_N = \overline{X} + \mathrm{j}\overline{Y}$ の確率密度関数は，ベースバンドシステムの結果より，

$$p_{\mathrm{A}}(\overline{z}) = p_{\mathrm{A}}(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-NA}(NA)^m}{m!} \frac{1}{2\pi N\sigma_m^2} \exp\left(-\frac{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}{2N\sigma_m^2}\right) \tag{33}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_{\mathrm{P},NA}(m) \cdot p_{\mathrm{G},0,N\sigma_m^2}(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{\mathrm{P},NA}(m) \cdot p_{\mathrm{G},0,N\sigma_m^2}(\overline{x}) \cdot p_{\mathrm{G},0,N\sigma_m^2}(\overline{y}) \tag{34}$$

となる．同相成分と直交成分はそれぞれベースバンドシステムの同一分布に従う互いに独立なクラス A 雑音の N 個のランダム変数の足し合わせの結果と同等である．

4　クラス A 雑音の主要パラメータの推定

ベースバンドシステムにおける主要パラメータの推定について述べる．式 (14)，(17)，(20) より，雑音の値の 2 次モーメント $\mathcal{X}_2 = E[X^2]$，4 次モーメント $\mathcal{X}_4 = E[X^4]$，6 次モーメント $\mathcal{X}_6 = E[X^6]$ で 3 つの連立方程式が成立している．この連立方程式を解くことで，主要パラメータ A, Γ, σ^2 が求められる．

$$A = \frac{25(\mathcal{X}_4 - 3\mathcal{X}_2^2)^3}{3(\mathcal{X}_6 + 30\mathcal{X}_2^3 - 15\mathcal{X}_2\mathcal{X}_4)^2} \tag{35}$$

$$\Gamma = \frac{3\mathcal{X}_2(\mathcal{X}_6 + 30\mathcal{X}_2^3 - 15\mathcal{X}_2\mathcal{X}_4)}{5(\mathcal{X}_4 - 3\mathcal{X}_2^2)^2} - 1 \tag{36}$$

$$\sigma^2 = \mathcal{X}_2 \tag{37}$$

測定結果の i 番目の雑音の値を x_i としたとき，

$$\mathcal{X}_2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2, \quad \mathcal{X}_4 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^4, \quad \mathcal{X}_6 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^6 \tag{38}$$

で近似する．

パスバンドシステムの等価低域系のクラス A 雑音のエンベロープのランダム変数を $W = \sqrt{X^2 + Y^2}$ で表す．式 (26)，(29)，(32) より，エンベロープの 2 次モーメント $\mathcal{W}_2 = E[W^2]$，4 次モーメント $\mathcal{W}_4 = E[W^4]$，6 次モーメント $\mathcal{W}_6 = E[W^6]$ で 3 つの連立方程式が成立している．この連立方程式を解くことで，主要パラメータの A, Γ, σ^2 が求められる．

$$A = \frac{9(\mathcal{W}_4 - 2\mathcal{W}_2^2)^3}{2(\mathcal{W}_6 + 12\mathcal{W}_2^3 - 9\mathcal{W}_2\mathcal{W}_4)^2} \tag{39}$$

$$\Gamma = \frac{2\mathcal{W}_2(\mathcal{W}_6 + 12\mathcal{W}_2^3 - 9\mathcal{W}_2\mathcal{W}_4)}{3(\mathcal{W}_4 - 2\mathcal{W}_2^2)^2} - 1 \tag{40}$$

$$\sigma^2 = \frac{\mathcal{W}_2}{2} \tag{41}$$

実際の測定では，i 番目の雑音のエンベロープを w_i としたとき，

$$\mathcal{W}_2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i^2, \quad \mathcal{W}_4 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i^4, \quad \mathcal{W}_6 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i^6 \tag{42}$$

で近似する．

5　クラス A 雑音の生成

性能評価のためのシミュレーションを行う際に，クラス A 雑音の確率密度関数に基づく乱数生成が必要となる．式 (2) から，ポアソンランダム変数及びガウスランダム変数を生成するルーチンがあれば，容易に任意のパラメータのクラス A 雑音を生成することが可能である．

ベースバンドシステムの場合，生成アルゴリズムは

1. ポアソン分布 $P_{\mathrm{P},A}(m)$ に基づく平均 A のポアソンランダム変数 $M = m$ を生成する．

2. ガウス確率密度関数 $p_{\mathrm{G},0,\sigma_m^2}(x)$ に基づく分散 $\sigma_m^2 = (m/A)\sigma_\mathrm{I}^2 + \sigma_\mathrm{G}^2$ のガウスランダム変数 $X = x$ を生成する．

となる．

パスバンドシステムの場合，生成アルゴリズムは

1. ポアソン分布 $P_{\mathrm{P},A}(m)$ に基づく平均 A のポアソンランダム変数 $M=m$ を生成する．
2. ガウス確率密度関数 $p_{\mathrm{G},0,\sigma_m^2}(\cdot)$ に基づく分散 $\sigma_m^2=(m/A)\sigma_{\mathrm{I}}^2+\sigma_{\mathrm{G}}^2$ の 2 つのガウスランダム変数 $X=x$, $Y=y$ を生成する．

となる．

6　クラス A 雑音環境下のビット誤り率

シミュレーションで E_b/N_0 対ビット誤り率を導出する．図中の A はインパルス指数，Γ はガウス雑音対インパルス性雑音比を表す．高 E_b/N_0 領域において，性能劣化が顕著である様子が分かる．

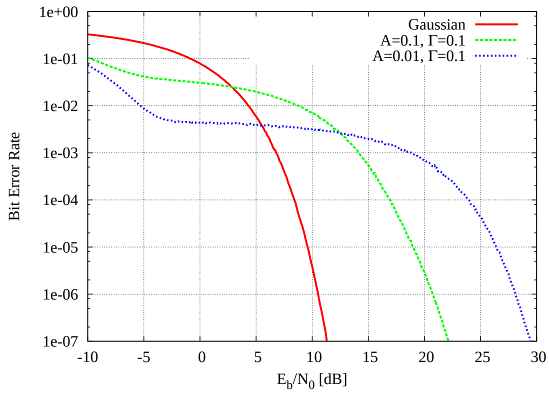

図 2: 2PAM のビット誤り率特性

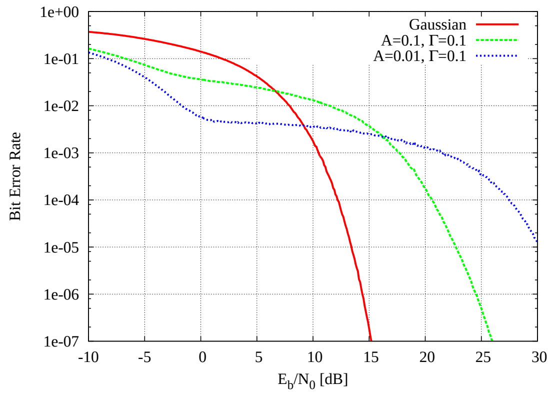

図 3: 4PAM のビット誤り率特性

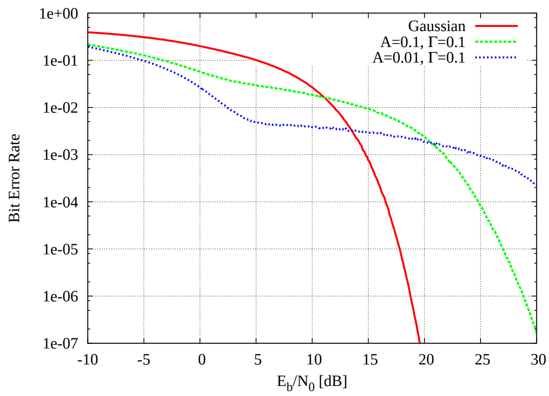

図 4: 8PAM のビット誤り率特性

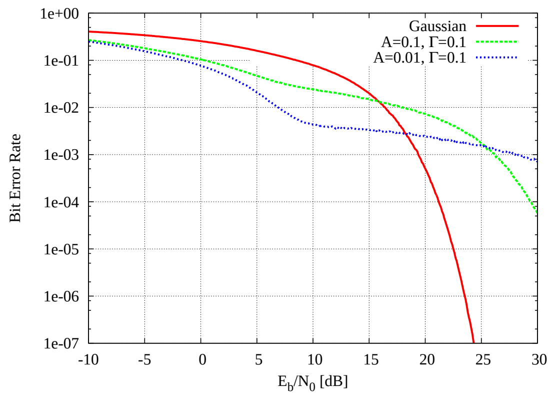

図 5: 16PAM のビット誤り率特性

参考文献

[1] D. Middleton, “Procedures for determining the parameters of the first-order canonical models of Class A and Class B electromagnetic interference [10],” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-21, no. 3, pp. 190–208, Aug. 1979.