多次元ガウス積分の数値計算

梅原大祐

初出: 平成 18 年 12 月 7 日

1 はじめに

実数拡散系列を用いた CSK/2PAM のビット誤り率を計算するのに，互いに相関を有する多次元ガウス分布の多重積分を行う必要がある．そこで，モンテカルロ法に用いた数値計算を行った．

いろいろな知識を拾い集めて発想に至った．その中でもお奨めの文献は [1,2] である．

2 実数拡散系列を用いた CSK/2PAM の定式化

系列長 N の実数拡散系列の一つを

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 = (s_0, \cdots, s_N)^T \tag{1}$$

と表記する．T は転置の記号である．$\boldsymbol{s}$ の左巡回 i シフトを $\boldsymbol{s}_i$ と表記する．すなわち，

$$\boldsymbol{s}_i = (s_i, \cdots, s_N, s_0 \cdots, s_{i-1})^T \tag{2}$$

である．ここで，添字 i は N を法とした正整数である．なお，$\boldsymbol{s}_i$ は $\boldsymbol{s}$ の右巡回 $(N-i)$ シフトに相当する．送信ビット列に応じて，$\boldsymbol{s}_i$ もしくは $-\boldsymbol{s}_i$ を送信する変調方式を CSK (Code Shift Keying)/2PAM と呼ぶ．CSK/2PAM の検出器は相関検出により実現される．実数拡散系列のエネルギーを $E_s = \boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{s}$ とする．$\boldsymbol{s}_i$ と $\boldsymbol{s}_j$ の正規化自己相関 $R_{i,j}$ は

$$R_{i,j} = \frac{1}{E_s} \cdot \boldsymbol{s}_i^T \cdot \boldsymbol{s}_j = \frac{1}{E_s} \sum_{k=0}^{N-1} s_{i+k} \cdot s_{j+k} \tag{3}$$

を定義する．定義から，$R_{i,j} = R_{j,i}$ であり，$k = i - j$ に対して R_k と表記する．なお，$R_0 = 1$ であり，$R_k = R_{N-1-k}$ である．$R_{i,j}$ を i 行 j 列の要素とした行列を自己相関行列と呼び，$\boldsymbol{R}$ で表す．$R_{i,j} = R_{i-j}$ より，$\boldsymbol{R}$ は実数 Toeplitz 行列である．$\boldsymbol{R}$ に関する重要な性質は次の通りである．固有値は実数であり，固有ベクトルは実数である．行列 $\boldsymbol{R}$ は正定値，すなわち，全ての固有値が実数である．

3 実数拡散系列を用いた CSK/2PAM のビット誤り率

CSK/2PAM 変調信号として $\boldsymbol{s}_0$ を送信したと仮定する．$\boldsymbol{s}_0$ が AWGN (加法的白色雑音) チャネルを通過したときの受信信号を $\boldsymbol{r} = (r_0, \cdots, r_{N-1}) = \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{n}$ とする．ここで，雑音ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_0, \cdots, n_{N-1})$ はそれぞれが平均 0，分散 $N_0/2$ の互いに独立な雑音である．各相関器出力 $C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}_i)$ は，

$$C(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}_i) = R_i E_s + \boldsymbol{s}_i^T \cdot \boldsymbol{n} = \sqrt{\frac{E_s N_0}{2}} \left(R_i \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} + n_i' \right) \tag{4}$$

で表される．$n'_i = \sqrt{2/(E_s N_0)} \cdot \boldsymbol{s}_i^T \cdot \boldsymbol{n}$ であり，ガウス雑音の線形和であるので，多次元ガウス確率密度関数に従う．平均 $E[n'_i] = 0$，分散 $E[n_i'^2] = 1$ であり，共分散は

$$E[n'_i n'_j] = \frac{2}{E_s N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} s_{i+k} s_{j+\ell} E[n_k n_\ell] = \frac{2}{E_s N_0} \sum_{k=0}^{N-1} s_{i+k} s_{j+k} E[n_k^2] = R_{i,j} \tag{5}$$

と導かれる．従って，$\boldsymbol{n}' = (n'_0, \cdots, n'_{N-1})$ の確率密度関数は,

$$p_{\boldsymbol{N}'}(\boldsymbol{n}') = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \boldsymbol{R})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{n}'^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{n}'\right) \tag{6}$$

で与えられる．

$\boldsymbol{x} = (x_0, \cdots, x_{N-1})$，$x_i = R_i \sqrt{2E_s/N_0} + n'_i$ とおく．平均ベクトル $\boldsymbol{m} = (m_0, \cdots, m_{N-1})$ は $m_i = E[x_i] = R_i \sqrt{2E_s/N_0}$ であり，共分散は $E[x_i x_j] = E[n'_i n'_j] = R_{i,j}$ であるので，共分散行列は $\boldsymbol{R}$ である．信号が $\boldsymbol{s}_0$ と正しく判定されるのは，$x_0 > 0$ かつ全ての $i \neq 0$ に対して $x_0 > |x_i|$ が成り立つことである．この条件を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合を $\mathbb{X}$ とおく．このとき，正しく判定される確率 P_c は,

$$P_c = \int_{\mathbb{X}} p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{7}$$

$$= \int_{\mathbb{X}} \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \boldsymbol{R})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})^T \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\right) d\boldsymbol{x} \tag{8}$$

で表現される．2PAM 変調実数拡散系列の数は $M = 2N$ であり，一系列当たり $1 + \log_2(N)$ ビットを送ることができる．送信系列が誤る確率は $P_M = 1 - P_c$ であり，ビット誤り率は $P_b = N \cdot P_M/(2N-1) \approx P_M/2$ である．

4　モンテカルロ法を用いた多変数ガウス積分の数値計算

ビット誤り率 P_b を計算したい．ビット誤り率を計算するには，受信系列が正しく判定される確率 P_c を計算する必要がある．P_c を計算するには，多重積分の数値計算をしなければならない．まともに多変数の多重積分を行うには，計算コストが高いという問題点がある．そこで，$\boldsymbol{x}$ を互いに独立な変数に変換し，その上で乱数発生に基づく確率分布計算を行うことを提案する．$\boldsymbol{R}$ は実数 Toeplitz 正定値行列であるため，対角化が可能である．対角化行列を $\boldsymbol{Q}$ とし，求められる対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ とおけば，$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{Q}$ である．このとき,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{x} \tag{9}$$

という変数変換をする．変数変換後の確率変数 $\boldsymbol{y}$ の平均と共分散はそれぞれ

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{m} = (\mu_0, \cdots, \mu_{N-1}) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(\lambda_0, \cdots, \lambda_{N-1}) = \mathrm{diag}(\gamma_0^2, \cdots, \gamma_{N-1}^2) \tag{11}$$

となり，確率密度関数は,

$$p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det \boldsymbol{\Lambda})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})\right) \tag{12}$$

$$= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma_i} \exp\left(-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\gamma_i^2}\right) \tag{13}$$

となる．$\mathbb{X}$ に対応する集合を $\mathbb{Y} = \{\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{X}\}$ とおけば，P_c は

$$P_c = \int_{\mathbb{Y}} p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \tag{14}$$

$$= \int_{\mathbb{Y}} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma_i} \exp\left(-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\gamma_i^2}\right) d\boldsymbol{y} \tag{15}$$

となる．

確率密度関数 $p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})$ に従うランダム変数ベクトルを $\boldsymbol{Y} = (Y_0, \cdots, Y_{N-1})$ とおく．$\boldsymbol{Y}$ に基づく次のランダム変数 Z を考える．

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{if } \boldsymbol{Y} \in \mathbb{Y}\,(\boldsymbol{QY} \in \mathbb{X}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

このとき，確率は $\Pr\{Z = 1\} = P_c$，$\Pr\{Z = 0\} = 1 - P_c$ となる．$Z = z$ の平均は $m_Z = E[z] = P_c$ であり，分散は $\sigma_Z^2 = E[z^2] - E[z]^2 = P_c(1 - P_c)$ である．

以上の準備を元に，P_c を求める手続きを述べる．

1. 総試行回数 K を設定．試行カウント $k = 0$，累積度数 $F = 0$ と初期化．
2. 全ての i に対して平均 μ_i，分散 γ_i^2 のランダム変数 Y_i を生成．
3. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QY}$ を導出．$X_0 > 0$ かつ $i \neq 0$ に対して $X_0 > |X_i|$ であれば，累積度数 $F = F + 1$ としてインクリメント．
4. 試行カウント $k = k + 1$ としてインクリメント．$k < K$ であれば，手順 2 へ戻る．$k = K$ であれば，次の手順へ進む．
5. $P_c = F/K$ として，終了．

この導出法の精度について述べる．上の手続きにおいて各試行 k に関するランダム変数を $Z = z_k$ とおく．すなわち，$z_k = 1$ のときに手順 3 において F がインクリメントされる．求めたいものは $E[z] = P_c$ であり，P_c を次で近似している．

$$P_c \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} z_k \tag{17}$$

総試行回数 K に関する誤差を

$$e_K = E[z] - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} z_k \tag{18}$$

とおけば，平均 $E[e_K] = 0$，分散

$$E[e_K^2] = \frac{1}{K}(E[z^2] - E[z]^2) = \frac{\sigma_Z^2}{K} \tag{19}$$

となる．誤差ランダム変数 e_K は試行回数 K が十分大きくなれば，ガウス分布として近似できる．このとき，標準誤差として，

$$P_c \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} z_k \pm \frac{\sigma_Z}{\sqrt{K}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} z_k \pm \sqrt{\frac{P_c(1 - P_c)}{K}} \tag{20}$$

が与えられる．誤差を小さくするには σ_Z に対して十分大きい K を用意する必要があるが，σ_Z の中に求めるべき P_c があり，最初から見積もることは困難である．シミュレーションの値を参考にして，試行回数を見積るのが一つの方法として挙げられる．または，今回の場合では，P_M の値が小さいところでのシミュレーションであるので，$\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{X}$ がある程度の要素数になるまで試行を繰り返す方法も有効であろう．なお，今回は P_c を計算対象としたが，判定する集合を $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{X}$ とすれば，直接 P_M を計算することも可能である．

参考文献

[1] G. J. Borse, *Numerical Methods with MATLAB*, P. W. S. Publishing, 1997.

[2] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C++ Second Edition*, Cambridge University Press, 2002.